ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

Математика. Муниципальный этап, 2024

7 класс. Ключи

Правильный ответ на каждую задачу оценивается в 5 баллов, неправильный — в 0 баллов, если не указано иное.

Задача 1. 5.

Задача 2. 4.

Задача 3. 34.

Задача 4. $17 \times 42 = 714$.

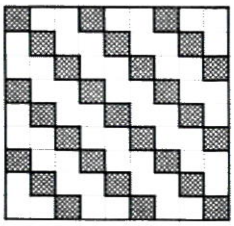
Задача 5. $X = 1$, $Y = 0$. *Только один верный ответ из двух — 2 балла.*

Задача 6. а) Дороже; б) на 17% (за отсутствие символа % баллы не снижать). *Пункт а) — 2 балла. Пункт б) — 3 балла.*

Задача 7. 42.

Задача 8. *Проверять пример!* Например, так: $(77 : 7) \times (77 : 7) + 7 : 7 = 122$. *Любой верный ответ — 5 баллов.*

Задача 9. а) 27; б) Пример проверять, один из возможных показан на рисунке. *Пункт а) — 2 балла. Пункт б) любой верный пример — 3 балла.*



Задача 10. 34.

Задача 11. 6.

Задача 12. 15. *Если в ответе записано выражение 6x+9 вместо числа 15 — 2 балла.*

Задача 13. 132; 231; 330. *Один верный ответ — 1 балл; два верных ответа — 3 балла; все три верных ответа — 5 баллов. Наличие каждого неверного ответа — минус 2 балла, но не ниже нуля.*

Задача 14. 22,5. *За отсутствие символа градуса не снижать!*

Задача 15. 12. *Решение ребуса приводить не требуется, но оно существует. Например, $12 \cdot 86 = 1032$.*

Задача 16. 0; 6; 8; 9; 10. *Каждый верный ответ — плюс 1 балл. Наличие каждого неверного ответа — минус 1 балл, но не ниже нуля.*

Задача 17. а) 151200; б) 32. *Пункт а) — 1 балл. Пункт б) — 4 балла.*

Задача 18. 244.

Задача 19. 2.

Задача 20. 4.

8 класс

1. В магазине продают фломастеры. Если вы покупаете меньше 100 фломастеров, то стоимость одного фломастера будет 65 рублей, а если купить фломастеров 100 или больше, то стоимость одного фломастера будет 57 рублей. Например, выгоднее купить 100 фломастеров по 57 рублей, чем 99 фломастеров по 65 рублей. При каком *наименьшем* числе x покупка 100 фломастеров выгоднее, чем покупка x фломастеров по 65 рублей?

Ответ: 88 *фломастеров.*

Решение. Плата за фломастеры уменьшится сильнее всего, если мы увеличим число покупаемых фломастеров до 100. Покупка при этом будет стоить $57 \cdot 100 = 5700$ рублей. Обозначим требуемое число фломастеров через x. Тогда x — *наименьшее* натуральное число, для которого верно неравенство $65 \cdot x > 5700$, откуда $x = 88$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Подбором установлено, что покупка 100 фломастеров по 57 рублей выгоднее покупки 88 фломастеров по 65 рублей, — 7 баллов. Решение с арифметическими ошибками — не более 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Вася написал 2024-значное натуральное число. Каждое двузначное число, образованное соседними (слева направо) цифрами этого числа, делится на 19 или на 21. Последняя цифра написанного числа 7. Какая цифра первая?

Ответ: *первая цифра* 3.

Решение. Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 19 или на 21. Это 19, 38, 57, 76, 95, 21, 42, 63, 84. У всех этих чисел последние цифры различны, значит, искомое число мы сможем восстановить однозначно. Последняя цифра 7, значит, соответствующее двузначное число 57, то есть предыдущая цифра в числе 5. Эта цифра 5 соответствует двузначному числу 95, следовательно, перед ней стоит цифра 9. Рассуждая аналогично, получим ряд из нескольких последних цифр числа: $\ldots 957\,638421957$. Набор 638421957 из 9 цифр будет теперь всё время повторяться. Всего же цифр 2024, из которых период из 9 цифр встречается 224 раза, и ещё 8 первых (слева) цифр — последние 8 цифры периода. Таким образом, первая цифра искомого числа 3.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Отмечено, что в числе Васи есть повторяющийся набор (период) из 9 цифр — 3 балла. Доказано, что период повторяется 224 раза — ещё 3 балла. Полное решение — 7 баллов.

3. Группа школьников покупает билеты в театр и кино. Имеющихся денег достаточно для покупки 3 билетов в театр и 7 билетов в кино, но не хватает на покупку 7 билетов в театр и 1 билета в кино. Хватит ли денег на покупку 11 билетов в кино?

Ответ: *хватит.*

Решение. Обозначим стоимость билета в театр через t, а в кино — через k. Тогда имеем из условия

$$3t + 7k < 7t + k \iff 6k < 4t \iff k < \frac{2}{3}t \iff 4k < \frac{8}{3}t < 3t.$$

Отсюда $11k = 7k + 4k < 7k + 3t$, то есть стоимость 11 билетов в кино меньше стоимости 7 билетов в кино и 3 билетов в театр. Значит, имеющихся денег хватит на покупку 11 билетов в кино.

Критерии. Только ответ или ответ «с объяснением» в виде числовых примеров — 0 баллов. Доказано, что $6k < 4t$ — 1 балл. Обосновано неравенство $4k < 3t$ — ещё 3 балла. Доказано, что $11k < 7k+3t$, но сделан вывод, что денег не хватит — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

4. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира гроссмейстер О. Бендер устроил сеанс одновременной игры для *некоторых* шахматистов турнира. В результате всего было сыграно 80 партий. Сколько было шахматистов на турнире и сколько шахматистов участвовало в сеансе одновременной игры?

Ответ: 13 *шахматистов, из них в сеансе одновременной игры участвовали двое.*

Решение. Пусть n — количество шахматистов в турнире, тогда между собой они сыграли $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. Действительно, каждый из них сыграл $(n-1)$ партий, но число $n(n-1)$ следует разделить на 2, так как при таком способе подсчёта мы каждую партию посчитали дважды — за одного участника и за другого. Так как было сыграно 80 партий, то $\frac{1}{2}\cdot n(n-1) \leqslant 80$. Наибольшее n, при котором выполняется это неравенство, равно 13, так как $\frac{1}{2}\cdot 13(13-1) = 78$; в этом случае О. Бендер сыграл $80 - 78 = 2$ партии, то есть он устроил сеанс с двумя шахматистами. Меньше 13 шахматистов быть не может: если их меньше 13, то между собой они сыграют не больше чем $\frac{1}{2}\cdot 12(12-1) = 66$ партий, и О. Бендер должен сыграть не менее чем с $80 - 66 = 14$ шахматистами, а их не более 12.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что шахматистов не более, чем 13 — 2 балла. Доказано, что шахматистов не менее 13 — ещё 3 балла. Доказано, что в сеансе участвовали 2 шахматиста — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов. За отсутствие доказательства формулы $\frac{1}{2}n(n-1)$ для подсчёта числа турнирных партий баллы не снижаются.

5. В трапеции $ABCD$ стороны BC и AD параллельны и $AB = BC = CD$. Точка N — середина диагонали BD, CH — высота трапеции. Докажите, что прямые HN и AC перпендикулярны.

Первое решение. (Рис. 1.) Пусть K — точка пересечения CN и AD. В равнобедренном треугольнике BCD медиана CN является высотой, то есть $CN \perp BD$. Прямоугольные треугольники CNB и KND равны ($BN = ND$, $\angle CBN = \angle KDN$), поэтому $CN = NK$, то есть HN — медиана в прямоугольном треугольнике KHC. Значит, $HN = KN = CN$ и $\angle NHC = \angle NCH = \angle KCH$.

В прямоугольном треугольнике KND: $\angle KCH = 90° - \angle NKH = \angle NDK$. Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $\angle NDK = \angle BDA = \angle CAH = 90° - \angle MCH$, поэтому $\angle NHC + \angle MCH = 90°$. Значит, треугольник CMH — прямоугольный, $\angle CMH = 90°$.

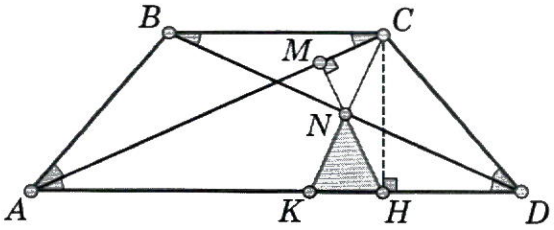


Рис. 1

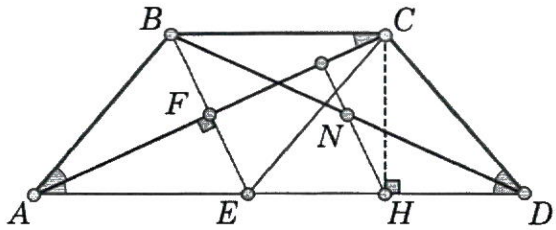


Рис. 2

Второе решение. (Рис. 2.) Пусть F — середина диагонали AC, прямая BF пересекает основание AD в точке E. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BF будет и высотой, поэтому $BF \perp AC$. Значит, в треугольнике ABE отрезок AF является биссектрисой и высотой. В четырёхугольнике $ABCE$ диагонали AC и BE взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, следовательно, $ABCE$ — ромб и $AB = CE = CD$. Треугольник ECD — равнобедренный, поэтому H — середина ED. Тогда $HN \parallel BE$, так как HN — средняя линия в треугольнике BDE. Учитывая, что $BE \perp AC$, получим, что $HN \perp AC$.

Замечание. Для случая, когда BC — бóльшее основание, доказательство аналогично.

Критерии. *Первое решение.* Доказано, что отрезок HN — медиана в треугольнике KHC — 2 балла. Доказано равенство $\angle KCH = \angle CAH$ или аналогичное ему — 4 балла.

Второе решение. Доказано, что AF — биссектриса и высота в треугольнике ABE — 2 балла. Доказано, что $ABCE$ – ромб — 3 балла, треугольник ECD – равнобедренный — 4 балла.

9 класс

1. В магазине продают фломастеры. Если вы покупаете меньше 100 фломастеров, то стоимость одного фломастера будет 67 рублей, а если купить фломастеров 100 или больше, то стоимость одного фломастера будет 57 рублей. Например, выгоднее купить 100 фломастеров по 57 рублей, чем 99 фломастеров по 67 рублей. При каком *наименьшем* числе x покупка 100 фломастеров выгоднее, чем покупка x фломастеров по 67 рублей?

Ответ: 86 *фломастеров.*

Решение. Плата за фломастеры уменьшится сильнее всего, если мы увеличим число покупаемых фломастеров до 100. Покупка при этом будет стоить $57 \cdot 100 = 5\,700$ рублей. Обозначим требуемое число фломастеров через x. Тогда x — *наименьшее* натуральное число, для которого верно неравенство $67 \cdot x > 5700$, откуда $x = 86$.

Критерии. Только ответ — 2 балла. Подбором установлено, что покупка 100 фломастеров по 57 рублей выгоднее покупки 86 фломастеров по 67 рублей, — 7 баллов. Решение с арифметическими ошибками — не более 5 баллов. Полное решение — 7 баллов.

2. Группа школьников покупает билеты в театр и кино. Имеющихся денег достаточно для покупки 5 билетов в театр и 11 билетов в кино, но не хватает на покупку 11 билетов в театр и 1 билета в кино. Хватит ли денег на покупку 19 билетов в кино?

Ответ: *хватит.*

Решение. Обозначим стоимость билета в театр через t, а в кино — через k. Тогда имеем из условия

$$5t + 11k < 11t + k \iff 10k < 6t \iff k < \frac{3}{5}t \iff 8k < \frac{24}{5}t < 5t.$$

Отсюда $19k = 11k + 8k < 11k + 5t$, то есть стоимость 19 билетов в кино меньше стоимости 11 билетов в кино и 5 билетов в театр. Значит, имеющихся денег хватит на покупку 19 билетов в кино.

Критерии. Только ответ или ответ «с объяснением» в виде числовых примеров — 0 баллов. Доказано, что $10k < 6t$ — 1 балл. Обосновано неравенство $8k < 5t$ — ещё 3 балла. Доказано, что $19k < 11k+5t$, но сделан вывод, что денег не хватит — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. На доске написано 100 положительных чисел. Оказалось, что сумма квадратов любых двух написанных чисел равна сумме всех остальных. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

Ответ: 4 900.

Решение. Сначала докажем, что все написанные числа равны друг другу. Предположим, что среди них есть два неравных числа a и b. Пусть S — сумма всех написанных чисел, c — любое другое написанное число. По условию $a^2 + c^2 = S - a - c$ и $b^2 + c^2 = S - b - c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $a^2 - b^2 = b - a$ или $(a-b)(a+b+1) = 0$. По предположению $a \neq b$, поэтому $a+b+1 = 0$, но это равенство невозможно для положительных a и b, противоречие.

Значит, все 100 написанных чисел равны одному и тому же числу a, их сумма равна $S = 100a$. По условию $a^2 + a^2 = S - a - a$, то есть $2a^2 = 98a$, и так как $a \neq 0$, получаем, что $a = 49$, $S = 4\,900$.

Критерии. Только ответ — 1 балл. Получено равенство вида $a^2 + a = b^2 + b$ — 2 балла. Доказано, что все числа равны друг другу — ещё 3 балла. Доказано, что все числа равны, но ошибочно найдено значение S — снимается 1 балл. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

4. В шахматном турнире каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира гроссмейстер О. Бендер устроил сеанс одновременной игры для *некоторых* шахматистов турнира. В результате всего было сыграно 100 партий. Сколько было шахматистов на турнире и сколько шахматистов участвовало в сеансе одновременной игры?

Ответ: 14 *шахматистов, из них в сеансе одновременной игры участвовали* 9.

Решение. Пусть n — количество шахматистов в турнире, тогда между собой они сыграли $\frac{1}{2}n(n-1)$ партий. Действительно, каждый из них сыграл $(n-1)$ партий, но число $n(n-1)$ следует разделить на 2, так как при таком способе подсчёта мы каждую партию посчитали дважды — за одного участника и за другого. Так как было сыграно 100 партий, то $\frac{1}{2} \cdot n(n-1) \leqslant 100$. Наибольшее n, при котором выполняется это неравенство, равно 14, так как $\frac{1}{2} \cdot 14(14-1) = 91$; в этом случае О. Бендер сыграл $100 - 91 = 9$ партий, то есть он устроил сеанс с девятью шахматистами. Меньше 14 шахматистов быть не может: если их меньше 14, то между собой они сыграют не больше чем $\frac{1}{3} \cdot 13(13-1) = 78$ партий, и О. Бендер должен сыграть не менее чем с $100 - 78 = 22$ шахматистами, а их не более 14.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказано, что шахматистов не более, чем 14 — 2 балла. Доказано, что шахматистов не менее 14 — ещё 3 балла. Доказано, что в сеансе участвовали 9 шахматистов — ещё 2 балла. Полное решение — 7 баллов. За отсутствие доказательства формулы $\frac{1}{2}n(n-1)$ для подсчёта числа турнирных партий баллы не снижаются.

5. В треугольнике ABC $(AB > AC)$ из вершины A провели биссектрису AL и медиану AM. Прямая, проходящая через точку M параллельно AB, пересекает AL в точке D, а прямая, проходящая через L параллельно AC, пересекает AM в точке E. Докажите, что прямые ED и AL перпендикулярны.

Решение. (Рис. 3.) Проведём через точку E прямую, параллельную AB. Пусть она пересекает AL и BC в точках P и Q соответственно. Из подобия треугольников MEQ и MAB, MEL и MAC:

$$MQ : MB = ME : MA = ML : MC,$$

и поскольку $MB = MC$, получаем, что $MQ = ML$. Следовательно, MD — средняя линия треугольника PLQ, и значит, $LD = DP$, то есть ED — медиана треугольника PEL. Из параллельности EP и EL сторонам AB и AC соответственно следует равенство углов:

$$\angle EPL = \angle BAL = \angle LAC = \angle ELP.$$

Значит, треугольник LEP — равнобедренный, и медиана ED является высотой, $ED \perp LP$.

Критерии. Доказано, что $MQ = ML$ — 2 балла. Доказано, что MD — средняя линия треугольника PLQ — ещё 1 балл. Отмечено, что ED — медиана треугольника PEL — ещё 1 балл. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

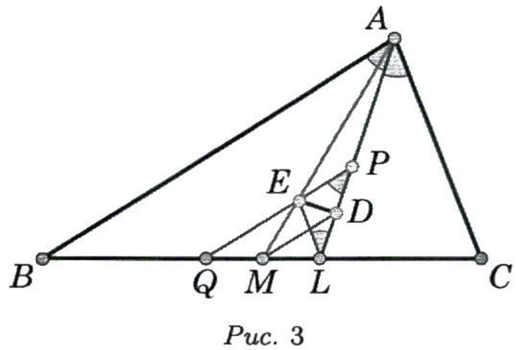


Рис. 3

10 класс

1. В семизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это шестизначное. В результате получили число 7654321. Найдите исходное число.

Ответ: 8 504 801.

Решение. Пусть x — полученное после зачёркивания цифры шестизначное число. Заметим, что зачёркнутая цифра была последней в исходном числе, так как в противном случае после вычитания последняя цифра была бы нулем. Пусть это цифра y. Тогда разность исходного и полученного числа равна $(10x + y) - x = 7654321$, то есть $9x + y = 9 \cdot 850480 + 1$. Значит, цифра y равна остатку от деления числа 7654321 на 9, а x равно частному от деления, то есть $y = 1$ и $x = 850\,480$.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что в исходном числе зачёркнута последняя цифра — ещё 1 балл. Доказано, что последняя цифра совпадает с остатком при делении на 9 — ещё 2 балла. Задача полностью решена в предположении, что зачёркнута последняя цифра — 5 баллов. Арифметическая ошибка — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. На доске написано 100 ненулевых чисел. Оказалось, что сумма кубов любых двух написанных чисел равна сумме всех остальных. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?

Ответ: 700 *или* -700.

Решение. Сначала докажем, что все написанные числа равны друг другу. Предположим, что среди них есть два неравных числа a, b и $a > b$. Пусть S — сумма всех написанных чисел, c — любое другое написанное число. По условию $a^3 + c^3 = S - a - c$ и $b^3 + c^3 = S - b - c$. Вычитая из первого равенства второе, получим $a^3 - b^3 = b - a$ или $a^3 + a = b^3 + b$. По предположению $a > b$, поэтому $a^3 > b^3$, и значит, $a^3 + a > b^3 + b$, противоречие.

Значит, все 100 написанных чисел равны одному и тому же числу a, их сумма равна $S = 100a$. По условию $a^3 + a^3 = S - a - a$, то есть $2a^3 = 98a$, и так как $a \neq 0$, получаем, что $a^2 = 49$, то есть $a = 7, S = 700$ или $a = -7, S = -700$.

Критерии. Указан хотя бы один из ответов — 1 балл. Получено равенство вида $a^3 + a = b^3 + b$ — 1 балл. Доказано, что все числа равны друг другу — ещё 3 балла. Доказано, что все числа равны, но пропущен один из случаев $S = 700$ или $S = -700$ — 6 баллов. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве есть 13 городов. Между некоторыми парами городов будут установлены двусторонние прямые автобусные, железнодорожные или самолетные сообщения. Какое *наименьшее* возможное количество сообщений необходимо установить, чтобы, выбрав любые два вида транспорта, можно было добраться из любого города в любой другой, не используя третий вид транспорта?

Ответ: 18 *сообщений.*

Решение. Пример для 18 сообщений показан на рис. 4. Красные, синие и зелёные линии (рёбра) обозначают три различных вида транспорта. В этом графе любые два города A и B соединяются друг с другом через город O дорогой из одного или двух рёбер, то есть из A в B можно добраться, не используя третий вид транспорта. С другой стороны, связный граф с 13 вершинами имеет не менее 12 рёбер, поэтому общее количество соединений для любых двух видов транспорта составляет по крайней мере 12. Таким образом, удвоенное общее количество всех соединений составляет по крайней мере $12 + 12 + 12 = 36$, то есть количество рёбер в таком графе не менее $36 : 2 = 18$.

Критерии. Правильно указана конструкция примера — 3 балла. Доказано, что число сообщений не меньше 18 — ещё 4 балла. Арифметическая ошибка при подсчёте числа рёбер — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

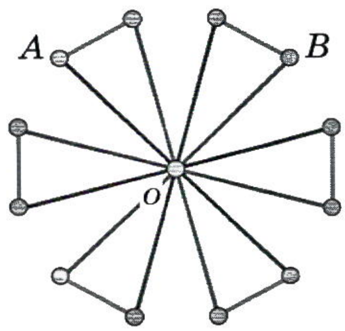


Рис. 4

4. Найдите все значения p и q такие, что для любого $x \in [-2; 2]$ будет справедливо неравенство

$$|\, x^2 + px + q \,| \leqslant 2.$$

Ответ: $p = 0,\ q = -2$.

Решение. Пусть числа p и q удовлетворяют условию задачи. Подставляя последовательно значения $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ из промежутка $[-2; 2]$, получаем, что p и q удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} -2 \leqslant q \leqslant 2, \\ -2 \leqslant 4 + 2p + q \leqslant 2, \\ -2 \leqslant 4 - 2p + q \leqslant 2. \end{cases} \iff \begin{cases} -2 \leqslant q \leqslant 2, \\ -6 \leqslant q + 2p \leqslant -2, \\ -6 \leqslant q - 2p \leqslant -2. \end{cases}$$

Сложив почленно два последних неравенства, получим $-6 \leqslant q \leqslant -2$. Отсюда и из первого неравенства следует, что $q = -2$. Тогда p удовлетворяет неравенствам $-2 \leqslant p \leqslant 0$ и $0 \leqslant p \leqslant 2$, и поэтому $p = 0$. Таким образом, если существуют числа p и q, удовлетворяющие условию задачи, то $p = 0$, $q = -2$ и других решений нет.

Осталось доказать, что найденные значения $p = 0$, $q = -2$ являются решением задачи, то есть для любого $x \in [-2; 2]$ выполняются неравенства $-2 \leqslant x^2 - 2 \leqslant 2 \iff 0 \leqslant x^2 \leqslant 4$, которые, очевидно, справедливы.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказан один из двух фактов $p = 0$ или $q = -2$ — 2 балла. Найдены значения $p = 0$ и $q = -2$ — 5 баллов. Проверено, что значения $p = 0$ и $q = -2$ удовлетворяют условию — 2 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Окружности ω_1 и ω_2 касаются друг друга внешним образом в точке C и касаются внутренним образом окружности ω в точках A и B. Прямая AB вторично пересекает окружность ω_1 в точке D. Найдите величину угла BCD.

Ответ: 90°.

Решение. (Рис. 5.) Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей ω, ω_1, ω_2, соответственно. Тогда точки O_1 и O_2 расположены на сторонах равнобедренного треугольника AOB. Треугольник AO_1D также равнобедренный, поэтому $\angle ADO_1 = \angle ABO$, откуда $O_1D \parallel OB$.

Пусть прямая DC пересекает вторично ω_2 в точке E. Так как C лежит на линии центров O_1O_2, из равнобедренных треугольников DO_1C и EO_2C имеем

$$\angle EDO_1 = \angle O_1CD = \angle O_2CE = \angle O_2ED,$$

откуда $O_1D \parallel O_2E$. (Эту параллельность можно получить и по-другому, рассматривая гомотетию с центром в C, переводящую ω_1 в ω_2.)

Таким образом, точка E лежит на прямой BO_2. Значит, BE — диаметр окружности ω_2 и $\angle BCE = 90^\circ$. Отсюда $\angle BCD = 90^\circ$.

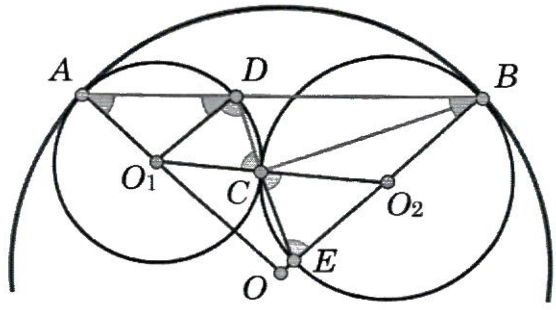


Рис. 5

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Доказана параллельность O_1D и OB — 2 балла. Доказана параллельность O_1D и O_2E — ещё 2 балла. Доказано, что точка E лежит на прямой OB — ещё 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

11 класс

1. В семизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это шестизначное. В результате получили число 1234567. Найдите исходное число.

Ответ: 1 371 741.

Решение. Пусть x — полученное после зачёркивания цифры шестизначное число. Заметим, что зачёркнутая цифра была последней в исходном числе, так как в противном случае после вычитания последняя цифра была бы нулем. Пусть это цифра y. Тогда разность исходного и полученного числа равна $(10x+y)-x = 1234567$, то есть $9x+y = 9\cdot 137174+1$. Значит, цифра y равна остатку от деления числа 1234567 на 9, а x равно частному от деления, то есть $y=1$ и $x = 137\,174$.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что в исходном числе зачёркнута последняя цифра — ещё 1 балл. Доказано, что последняя цифра совпадает с остатком при делении на 9 — ещё 2 балла. Задача полностью решена в предположении, что зачёркнута последняя цифра — 5 баллов. Арифметическая ошибка — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. При каких значениях a функция $f(x)$ будет нечётной?

$$f(x) = \frac{2^x - a}{2^x + a}.$$

Ответ: *при* $a=-1$ *и* $a=1$.

Решение. Проверим свойство нечётности для функции $f(x)$. Имеем

$$f(-x) = \frac{2^{-x}-a}{2^{-x}+a} = \frac{1-a\cdot 2^x}{1+a\cdot 2^x}.$$

Сумма этих значений функции равна:

$$f(x)+f(-x) = \frac{(1-a^2)\cdot 2^{x+1}}{(2^x+a)(1+a\cdot 2^x)}.$$

Равенство $f(x) = -f(-x)$ возможно только при условии $1-a^2=0$, то есть при $a=\pm 1$. При этих значениях область определения функции f — вся числовая ось, за исключением $x=0$ при $a=-1$, — симметрична относительно начала координат. Таким образом, при $a=\pm1$ выполняются оба условия в определении свойства нечётности функции f.

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Подбором установлено, что при $a=1$ или $a=-1$ функция $f(x)$ чётная, — 2 балла. Доказано равенство $1-a^2=0$, необходимое для чётности $f(x)$, — 5 баллов. Пропущено условие симметричности (относительно 0) области определения $f(x)$ при $a=-1$ — снимается 1 балл. Пропущен один из случаев $a=-1$ или $a=1$ — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве есть 13 городов. Между некоторыми парами городов будут установлены двусторонние прямые автобусные, железнодорожные или самолетные сообщения. Какое *наименьшее* возможное количество сообщений необходимо установить, чтобы, выбрав любые два вида транспорта, можно было добраться из любого города в любой другой, не используя третий вид транспорта?

Ответ: 18 *сообщений.*

Решение. Пример для 18 сообщений показан на рис. 6. Красные, синие и зелёные линии (рёбра) обозначают три различных вида транспорта. В этом графе любые два города A и B соединяются друг с другом через город O дорогой из одного или двух рёбер, то есть из A в B можно добраться, не используя третий вид транспорта.

С другой стороны, связный граф с 13 вершинами имеет не менее 12 ребер, поэтому общее количество соединений для любых двух видов транспорта составляет по крайней мере 12. Таким образом, удвоенное общее количество всех соединений составляет по крайней мере $12 + 12 + 12 = 36$, то есть количество рёбер в таком графе не менее $36 : 2 = 18$.

Критерии. Правильно указана конструкция примера — 3 балла. Доказано, что число сообщений не меньше 18 — ещё 4 балла. Арифметическая ошибка при подсчёте числа рёбер — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

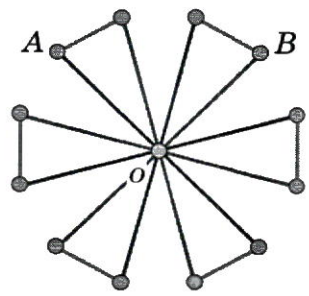


Рис. 6

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geqslant 2.$$

Решение. Используя равенство $a = 1 - b - c$, сначала преобразуем числитель первой дроби: $a^2 + b = a(1 - b - c) + b = a + b - a(b + c)$, и значит,

$$\frac{a^2+b}{b+c}=\frac{a+b-a(b+c)}{b+c}=\frac{a+b}{b+c}-a,$$

поэтому

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}-(a+b+c)\,.$$

Слагаемое $a + b + c$ равно 1, поэтому требуемое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}-1\geqslant 2,\quad \text{то есть}\quad \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geqslant 3.$$

Осталось воспользоваться неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для трёх положительных чисел: $x + y + z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$. Тогда

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\ \geqslant\ 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{b+c}\cdot\frac{b+c}{c+a}\cdot\frac{c+a}{a+b}}=3,$$

что и требовалось.

Критерии. Неравенство приведено к равносильной форме

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geqslant 3.$$

— 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а его диагонали пересекаются в точке M. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно, а точки K и L — проекции точки M на стороны BC и AD. Докажите, что прямые EF и KL перпендикулярны.

Решение. (Рис. 7.) Пусть X и Y — середины отрезков AM и BM соответственно. Отрезки LX и KY — медианы прямоугольных треугольников ALM и BKM, проведённые из вершин прямых углов, а EX и EY — средние линии треугольника AMB, поэтому

$$LX=\frac{1}{2}AM=EY,\quad KY=\frac{1}{2}BM=EX.$$

Кроме того, четырёхугольник $EXMY$ — параллелограмм, вписанные углы CAD и CBD опираются на одну и ту же дугу, а $\angle LXM$ и $\angle KYM$ — внешние углы треугольников AXL и BYK, поэтому

$$\angle EXM=\angle EYM,\ \ \angle LXM=2\angle CAD=2\angle CBD=\angle KYM.$$

Значит,

$$\angle LXE = \angle LXM + \angle EXM = \angle KYM + \angle EYM = \angle KYE.$$

Следовательно, треугольники LXE и KYE равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EL = EK$, то есть точка E равноудалена от концов отрезка KL. Аналогично точка F также равноудалена от концов этого отрезка. Значит, прямая EF — серединный перпендикуляр к отрезку KL, то есть $EF \perp KL$.

Критерии. Доказано, что $EXMY$ является параллелограммом — 2 балла. Доказано равенство углов LXE и KYE — ещё 1 балл. Доказано равенство треугольников LXE и KYE (и значит, $EL = EK$) — ещё 2 балла. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

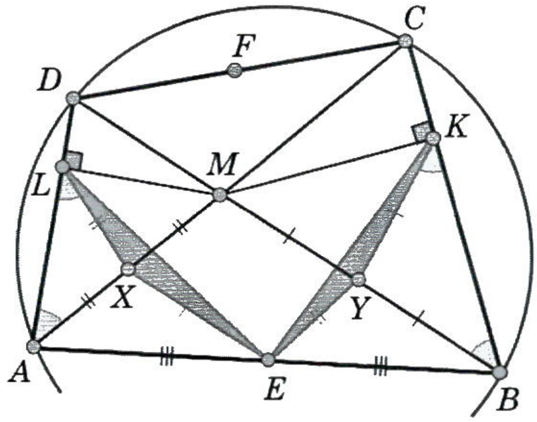


Рис. 7